

باسمه تعالی
هجدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
آزمون پایان ترم الگوریتم
چهارشنبه ۱۳ شهریور ۱۳۸۷

نیک‌زاد، صادقان

وقت: ۴ ساعت و نیم

مسئله‌ی اول: اصلاً سخت نیست! ۱۰ نمره

وحید به تازگی شغلی به عنوان پستیچی پیدا کرده است. شهری که او در آن زندگی می‌کند شامل n تقاطع و m خیابان است. هر خیابان دو تقاطع را به یکدیگر متصل می‌کند و عبور از هر دو جهت در آن میسر است. وحید هر روز بعد از کار از تقاطع s که پستخانه در آن قرار دارد تا تقاطع t که خانه او در آنجاست می‌رود ($s \neq t$). زمان رسیدن از یک سر هریک از خیابانهای شهر به سر دیگر آن بر حسب دقیقه داده شده است (زمان رسیدن از سر هر خیابان تا سر دیگر آن عددی صحیح و مثبت است). اگر وحید k دقیقه بعد از اتمام کارش به خانه برسد باید k تومان به همسرش پرداخت کند! در برخی از تقاطعهای شهر خانه وجود دارد (در هر تقاطع حداکثر یک خانه) که نامه آنها در پستخانه است و وحید می‌تواند بعد از کار، در راه خانه بعضی از این نامه‌ها را به مقصدشان برساند و به ازای هر نامه یک تومان انعام دریافت کند.

وحید می‌خواهد مسیری را از پستخانه تا خانه خود انتخاب کند که با رساندن نامه‌های سر راه و دریافت انعام، بخشی از هزینه‌ای که باید به همسرش بپردازد را جبران کند و کمترین پول ممکن را بپردازد. یعنی اگر k دقیقه بعد از کار به خانه برسد و در راه p نامه را برساند، می‌خواهیم $k - p$ مینیمم مقدار ممکن را داشته باشد. الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه دهید که با دریافت تعداد تقاطعها، خیابانهای بین این تقاطعها (به شکل یک ماتریس $n \times n$) و محل کار و محل زندگی وحید، این مقدار مینیمم را بدست آورد.

توجه کنید ممکن است وحید از مسیری به خانه برود که دیرتر از سریعترین مسیر به خانه برسد ولی به نفع او باشد.

مسئله‌ی دوم: نسبتاً گلابی ۱۵ نمره

n عدد صحیح، بین ۱ تا x ، با نامهای $x_1 \dots x_n$ داده شده است. الگوریتمی از $O(n + x \log x)$ ارائه دهید تا تعداد زوج مرتب‌های به صورت (i, j) که x_i بر x_j بخشپذیر است را پیدا کند.

مسئله‌ی سوم: کاسبی ۲۰ نمره

در شهر «اتوپیا» n نفر با نام‌های $p_1 \dots p_n$ زندگی می‌کنند. «پدر خوانده» n عدد آبنبات دارد و می‌خواهد این آبنبات‌ها را به مردم بیچاره بفروشد. او می‌داند که برای هر i ، $1 \leq i \leq n$ ، p_i حاضر است b_i تومان پول، برای یک آبنبات بپردازد ($0 \leq b_i$). در حقیقت b_i میزان علاقه‌ی p_i به آبنبات است. همچنین بین هر دو عضو دلخواه از مردم این شهر، مثل p_i و p_j یک رابطه دوستی وجود دارد. میزان استحکام این رابطه دوستی را با عددی نامنفی به شکل $w_{i,j}$ نشان می‌دهیم، در ضمن $w_{i,j} = w_{j,i}$. اگر p_i قبل از p_j آبنبات بخرد، میزان علاقه‌ی p_j به آبنبات به اندازه $w_{i,j}$ افزایش می‌یابد.

پدرخوانده برای فروش آبنبات‌ها گوشه‌ی خانه‌اش می‌نشیند. او می‌داند که در روز اول p_1 ، در روز دوم p_2 و ... در روز n ام p_n به سراغش می‌آیند تا از او آبنبات بخرند (هر کس حداکثر یک آبنبات از پدرخوانده می‌خرد). قبل از شروع روز اول، پدرخوانده می‌خواهد یک قیمت ثابت برای آبنبات‌ها مشخص کند (این قیمت را x می‌نامیم). در

روز i ام، p_i در صورتی آبنبات می خرد که میزان علاقه اش، بیشتر یا مساوی x باشد. پدرخوانده در ازای هر آبنباتی که بفروشد، x تومان سود می کند.

حال الگوریتمی ارائه دهید تا با دریافت n و $b_1 \dots b_n$ و همچنین میزان استحکام روابط دوستی، مقدار x را طوری مشخص کند که پس از n روز، پدرخوانده بیشترین سود ممکن را برده باشد.

زمان اجرای الگوریتم شما باید از $O(n^2)$ باشد. به الگوریتمی با زمان اجرای $O(n^3)$ ، ۱۰ نمره تعلق خواهد گرفت.

مسئله چهارم: MST ی چاق ۲۵ نمره

یک گراف وزن دار ساده با n راس و e یال داریم. یال های این گراف (به همراه وزنشان) به صورت «لیست مجاورت» به ما داده می شود. الگوریتمی ارائه دهید تا پر وزن ترین یال که می تواند در یک MST (زیر درخت فراگیر کمینه) از این گراف ظاهر شود را پیدا کند. در صورتی که بیش از یک جواب برای مساله وجود داشت، به دست آوردن تنها یک جواب کافی است.

در صورتی که زمان اجرای الگوریتم شما از $O(n + e \log e)$ باشد، همه ی نمره سوال به شما تعلق می گیرد و اگر از $O(n^2 \lg n)$ باشد، ۱۰ نمره خواهید گرفت.

مسئله پنجم: نسبتاً قشنگ ۳۰ نمره

n عدد دودویی متمایز k بیتی با نام های $x_1 \dots x_n$ به شما داده شده است. تعداد زوج مرتب هایی به شکل (x_i, x_j) از این n عدد به طوری که x_i و x_j دقیقاً در دو بیت متفاوت باشند چند تاست؟ الگوریتمی با زمان اجرای $O(nk^2)$ ۳۰ نمره و الگوریتمی با زمان اجرای $O(nk^2 \lg(nk))$ ، ۲۲ نمره خواهد گرفت.